Monotonicité des fonctions extrémales pour les inégalités de type Sobolev logarithmiques en dimension 1

Laurent Miclo

Monotonicité des fonctions extrémales pour les inégalités de type Sobolev logarithmiques en dimension 1

Laurent Miclo

Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités
U.P. et C.N.R.S.
Marseille, France

Résumé

On montre que pour calculer les constantes optimales associées à diverses inégalités fonctionnelles en dimension 1, il suffit de considérer des fonctions monotones. On s'intéresse aux contextes discrets et continus (ainsi qu'aux liens qu'ils entretiennent), dans lesquels on étudie les inégalités de Poincaré, de Sobolev logarithmique et diverses variantes obtenues par modifications des termes d'entropie et d'énergie.

Mots clés : inégalité de Poincaré, inégalité de Sobolev logarithmique (modifiée), monotonicité de fonctions extrémales, diffusions réelles, processus de vie et de mort.

MSC2000 : premièrement : 46E35, secondairement : 46E39, 49R50, 26A48, 26D10, 60E15.

1 Introduction et résultat

Soient μ et ν respectivement une probabilité et une mesure (positive) sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. On s'intéresse à la constante de Sobolev logarithmique associée qui est définie par (en adoptant la convention usuelle $0 \cdot \infty = 0$)

$$C(\mu, \nu) \quad \coloneqq \quad \sup_{f \in \mathcal{C}} \frac{\operatorname{Ent}(f^2, \mu)}{\nu[(f')^2]} \quad \in \bar{\mathbb{R}}_+ \tag{1}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions absolument continues f sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée faible a été notée f' ci-dessus. Rappelons que de manière générale, l'entropie d'une fonction mesurable et positive f par rapport à une probabilité μ est donnée par

$$\operatorname{Ent}(f, \mu) \quad \coloneqq \quad \begin{cases} \mu[f \ln(f)] - \mu[f] \ln(\mu[f]) & , \text{si } f \ln(f) \text{ est } \mu\text{-intégrable} \\ +\infty & , \text{sinon} \end{cases}$$

et que cette quantité appartient à $\bar{\mathbb{R}}_+$, comme conséquence immédiate de l'inégalité de Jensen, relativement à l'application convexe $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x \ln(x) \in \mathbb{R}$.

Le but de ce papier est de montrer que la définition précédente de $C(\mu, \nu)$ n'est pas modifiée si l'on se restreint aux fonctions monotones, ou encore, de manière équivalente, si l'on y remplace $\mathcal{C}$ par son sous-cône $\mathcal{D}$ formé des fonctions f telles que f' soit p.p. positif.

De prime abord, cette propriété peut sembler tout à fait anodine, pourtant on verra dans un article ultérieur qu'elle est très utile pour mieux appréhender les relations existant entre inégalités de Hardy et celles de Sobolev logarithmiques (voir dans cette direction le travail fondateur de Bobkov et Götze [3] puis les améliorations dues à Barthe et Roberto [2]). En particulier, elle permettra d'étendre aux inégalités de Sobolev logarithmiques la possibilité de calculs exacts exhibée dans [10] (sous des hypothèses appropriées d'asymptoticité et techniques de symétrie). Une autre motivation concerne les inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées (discrètes comme celles considérées par Wu [17] ou continues au sens de Gentil, Guillin et Miclo [9]), car nous avons l'espoir qu'une variante de la propriété de monotonicité précédente permettra finalement de leur appliquer des inégalités de Hardy.

Mais revenons à notre objectif actuel et même plutôt à une version discrète du résultat recherché. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, soit le segment discret $E \coloneqq \{0, 1, ..., N\}$, muni donc de sa structure de graphe (non-orienté) linéaire usuelle. Notons $A \coloneqq \{\{l, l+1\} \,:\, 0 \leq l < N\}$ l'ensemble de ses arêtes. Posons également $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions définies sur E. Si $f \in \mathcal{C}$, sa dérivée discrète f' est définie sur A par

$$\forall\ 0 \leq l < N, \qquad f'(\{l, l+1\}) \quad \coloneqq \quad f(l+1) - f(l)$$

Par ailleurs, soient μ et ν respectivement une probabilité sur E et une mesure sur A. Ces notations nous permettent de réinterpréter (1) dans ce contexte et comme ci-dessus, notre tâche principale sera de montrer que

$$C(\mu, \nu) \quad = \quad \sup_{f \in \mathcal{D}} \frac{\operatorname{Ent}(f^2, \mu)}{\nu[(f')^2]} \quad \in \bar{\mathbb{R}}_+ \tag{2}$$

où $\mathcal{D}$ est le sous-cône de $\mathcal{C}$ formé des fonctions admettant une dérivée positive.

En fait, il existe des passerelles entre les contextes continu et discret qui permettent de passer d'un résultat à l'autre. Ainsi nous commencerons par étudier la situation discrète, plus immédiate à traiter et illustrative de la démarche empruntée, puis nous en déduirons les propriétés analogues dans le cas continu. Il est aussi possible de retranscrire directement la preuve, quitte à prendre quelques précautions sur lesquelles nous reviendons plus loin.

Par ailleurs, signalons que pour la constante de Poincaré, les résultats correspondants ont déjà été obtenus, dans le cas discret par Chen (dans la preuve du théorème 3.2 de [6]) et dans un contexte continu par Chen et Wang (proposition 6.4 de [5], voir aussi la fin de la preuve du théorème 1.1 de Chen [7]), pour des diffusions assez régulières. Leur méthode repose en partie sur l'équation satisfaite par une fonction maximisante (qui est alors un vecteur propre associé au trou spectral). Mais il n'est pas clair qu'elle puisse s'adapter aux inégalités de Sobolev logarithmiques, ni même, dans le cas de la constante de Poincaré, aux situations irrégulières envisagées ci-dessus (voir par exemple l'hypothèse de continuité nécessitée par la seconde partie du théorème 1.3 de Chen [7]), ce qui nous a fait préférer une approche différente. En particulier, nous n'envisagerons pas a priori le problème de l'existence d'une fonction minimisante dans le cas continu (qui est crucial pour l'approche de Chen et Wang [5, 7]). D'ailleurs, peut-être est-il préférable d'aborder cette question a posteriori, une fois que l'on s'est restreint à ne considérer que des fonctions croissantes, pour le traitement de situations relativement régulières, on renvoie aussi à la dernière remarque de la section 4.

Le plan de l'article est le suivant : dans la section suivante on s'intéressera aux propriétés de monotonicité correspondantes pour le trou spectral, qu'il est nécessaire d'envisager d'abord pour traiter les cas où il n'existe pas de fonction extrémale dans les inégalités de Sobolev logarithmiques précédentes. Les situations où elle existe seront ensuite étudiées dans la section 3, ceci toujours dans le cadre discret. Puis ces considérations seront étendues au cas continu dans la section 4, par deux passages différents. Enfin une dernière section sera consacrée à diverses extensions, correspondant à des modifications de l'entropie et de l'énergie.

2 Trou spectral

Nous nous plaçons ici dans le cadre discret décrit précédemment et nous considérons l'inverse du trou spectral (encore appelé constante de Poincaré) associé à μ et ν, défini par

$$A(\mu,\nu) \quad := \quad \sup_{f\in\mathcal{C}} \frac{\mathrm{Var}(f,\mu)}{\nu[(f')^2]} \quad \in \bar{\mathbb{R}}_+ \tag{3}$$

où rappelons que de manière générale, la variance d'une fonction mesurable f par rapport à une probabilité μ est définie par

$$\mathrm{Var}(f,\mu) \quad = \quad \int (f(y)-f(x))^2\,\mu(dx)\mu(dy) \quad \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

Son intérêt pour nous provient du théorème 2.2.3 présenté par Saloff-Coste dans son cours [16], qui adapte un résultat dû à Rothaus [12, 13, 14] dans le cas continu (pour un contexte plus général que notre restriction à la dimension 1) : de deux choses l'une ; soit $C(\mu,\nu) = A(\mu,\nu)/2$, soit il existe une fonction $f\in\mathcal{C}$ telle que $C(\mu,\nu) = \mathrm{Ent}(f^2,\mu)/\nu[(f')^2]$. Cette alternative se montre en considérant une suite maximisante dans (1). Ainsi, dans la perspective de l'objectif présenté dans l'introduction, il est utile et instructif de commencer par considérer son analogue pour le trou spectral :

Proposition 1 *On ne change pas la définition (3) en y remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{D}$, c'est-à-dire en ne considérant que des fonctions monotones.*

Mais tout d'abord, remarquons que le supremum apparaissant dans (3) est toujours atteint. Pour s'en convaincre distinguons deux situations.

a) Le cas non-dégénéré où pour tout $a\in A$, on a $\nu(a)>0$. Puisque les expressions $\mathrm{Var}(f,\mu)$ et $\nu[(f')^2]$ sont invariantes par l'addition à la fonction f d'une constante et qu'elles sont homogènes d'ordre 2, on peut se restreindre dans (3) à ne considérer que des fonctions f qui vérifient $f(0)=0$ et $\nu[(f')^2]=1$. Soit maintenant une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ maximisante pour (3) et satisfaisant ces deux conditions. Il est clair que notre hypothèse sur ν assure que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}^{1+N}$. On peut donc en extraire une sous-suite convergeant vers une fonction f. Cette limite vérifie aussi

$\nu[(f')^2] = 1$ et on en déduit évidemment que $A(\mu,\nu) = \mathrm{Var}(f,\mu)/\nu[(f')^2]$, d'où l'existence d'une fonction extrémale pour (3).

b) S'il existe $\{i, i+1\} \in A$ tel que $\nu(\{i, i+1\}) = 0$, on considère deux sous-cas :

b1) Si $\mu(\{0, ..., i\}) > 0$ et $\mu(\{i+1, ..., N\}) > 0$, soit $f = \mathbb{1}_{\{i+1,...,N\}}$, on a $\mathrm{Var}(f,\mu) > 0$ et $\nu[(f')^2] = 0$, d'où $C(\mu,\nu) = +\infty$ et f est extrémale.

b2) Sinon, l'une des deux quantités $\mu(\{0, ..., i\})$ ou $\mu(\{i+1, ..., N\})$ est nulle et on peut restreindre le problème à celui des deux segments $\{0, ..., i\}$ ou $\{i+1, ..., N\}$ qui est de masse 1. Par itération, on se ramène ensuite à l'un des deux cas précédents.

Notons que dans l'alternative (b1) ci-dessus, la proposition 1 est montrée, on peut donc désormais faire l'hypothèse que $\nu > 0$ sur A. Cette observation est aussi valide pour la constante de Sobolev logarithmique et elle permet d'ailleurs de se retrouver presque sous l'hypothèse d'irréductibilité du théorème 2.2.3 de Saloff-Coste [16], si ce n'était qu'a priori μ n'a pas été supposé strictement positif sur E. Néanmoins, remarquons qu'il est toujours possible de se ramener à cette situation : notons $0 \le x_0 < x_2 < \cdots < x_n \le N$ les éléments de E auxquels μ donne un poids strictement positif. Soient $y_0, y_1, ..., y_n$ des valeurs réelles données, considérons le sous-espace affine de $\mathcal{C}$ formé des fonctions f telles que pour tout $0 \le i \le n$, $f(x_i) = y_i$, puis cherchons à y minimiser $\nu[(f')^2]$. Ceci nous amène à trouver, pour $0 \le i < n$ fixé, les fonctions g sur $\{x_i, x_i+1, ..., x_{i+1}\}$ qui minimisent $\sum_{x_i \le x < x_{i+1}} \nu(\{x, x+1\})(g'(\{x, x+1\}))^2$ tout en vérifiant les contraintes $g(x_i) = y_i$ et $g(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Par une application simple du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce problème d'optimisation admet la solution unique suivante :

$$\forall\ x_i \le x \le x_{i+1}, \quad g(x) \;=\; y_i + \left(\sum_{x_i \le y < x_{i+1}} \frac{1}{\nu(\{y, y+1\})}\right)^{-1} \sum_{x_i \le y < x} \frac{y_{i+1} - y_i}{\nu(\{y, y+1\})} \tag{4}$$

Ainsi en posant

$$\begin{aligned} \forall\ 0 \le i \le n, \qquad \widetilde{\mu}(i) &:= \mu(x_i) \\ \forall\ 0 \le i < n, \qquad \widetilde{\nu}(\{i, i+1\}) &:= \left(\sum_{x_i \le y < x_{i+1}} \frac{1}{\nu(\{y, y+1\})}\right)^{-1} \end{aligned}$$

on se ramènerait à une situation où la probabilité sous-jacente est strictement positive partout, de plus à l'aide de (4) on passe facilement des fonctions maximisantes pour l'un des problèmes à celles de l'autre. Ceci permettrait également de justifier complètement le rappel précédant la proposition 1.

D'autre part, on écartera aussi le cas trivial où μ est une masse de Dirac, ceci nous assurant que $A(\mu,\nu) > 0$.

Il est à présent possible d'être un peu plus précis sur les fonctions maximisantes dans (3) :

Lemme 2 *Soit f une fonction réalisant le maximum dans (3). Sous l'hypothèse que $\nu > 0$ sur A et que μ n'est pas une masse de Dirac, toute autre fonction maximisante est de la forme $af + b\mathbb{1}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.*

Preuve :

Clairement toute fonction de la forme $af + b\mathbb{1}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est bien également maximisante dans (3) si f l'est.

Réciproquement, soit g une fonction maximisante dans (3), quitte à lui retrancher $\mu[g]$, on peut supposer que $\mu[g] = 0$. En effectuant un calcul variationnel autour de g (c'est-à-dire en considérant $g + \epsilon h$, avec $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{C}$ quelconque, et en développant au premier ordre quand $\epsilon \to 0$ le rapport $\mathrm{Var}(g + \epsilon h, \mu)/\nu[(g' + \epsilon h')^2]$), on obtient aisément que g vérifie

$$\forall\ i \in E, \qquad A(\mu,\nu)[\nu(\{i, i+1\})(g(i) - g(i+1)) + \nu(\{i-1, i\})(g(i) - g(i-1))] \;=\; \mu(i)g(i)$$

avec les conventions que $\nu(\{-1,0\}) = 0 = \nu(\{N,N+1\})$.
Or, du fait que $A(\mu,\nu) > 0$ et $\nu > 0$ sur A, ces équations permettent à partir de $g(0)$ de calculer récursivement $g(1)$, $g(2)$ jusqu'à $g(N)$. Notons que $g(0) \neq 0$, sinon nous aboutirions à $g \equiv 0$, ce qui serait en contradiction avec $A(\mu,\nu) > 0$. Ainsi g est uniquement déterminé par le fait d'être une fonction maximisante de (3) et de vérifier $\mu[g] = 0$ et $g(0) = 1$. Ce qui peut aussi se récrire sous la forme énoncée dans le lemme précédent.

■

Un maximisant f pour (3) étant fixé, notre manière de montrer qu'il est monotone va être la suivante : en supposant par l'absurde qu'il ne l'est pas, on va trouver une décomposition de f en $\widetilde{f} + \widehat{f}$, avec $\widetilde{f}$ (et par conséquent $\widehat{f}$) n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(\mathbb{1}, f)$, telle que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Var}(f,\mu) & = & \mathrm{Var}(\widetilde{f},\mu) + \mathrm{Var}(\widehat{f},\mu) \\ \nu[(f')^2] & \geq & \nu[(\widetilde{f}')^2] + \nu[(\widehat{f}')^2] \end{array}$$

Evidemment ces deux relations impliquent que $\widetilde{f}$ et $\widehat{f}$ sont également des maximisants pour (3), d'où la contradiction voulue puisque $\widetilde{f}$ et $\widehat{f}$ ne sont pas de la forme requise par le lemme 2.

Soit donc désormais f une fonction maximisante pour (3) et non-monotone.
On dira que $i \in E$ est un maximum local de f si pour tout $j \in E$ vérifiant $f(j) > f(i)$, le segment $[\![i,j]\!]$ (qui désigne l'ensemble des points de E compris entre i et j) contient un élément k tel que $f(k) < f(i)$. Par définition, un minimum local de f sera un maximum local de $-f$.
Construisons maintenant $\widetilde{f}$ par un découpage à une ligne de niveau particulière. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f admet un maximum local i dans $[\![1,N-1]\!]$ tel qu'il existe un minimum local dans $[\![0,i]\!]$ et un dans $[\![i,N]\!]$. Parmi de tels maxima locaux choisissons celui (ou l'un de ceux) qui est de hauteur minimale relativement à f et appelons-le i_0. Notons i_1 (respectivement i_{-1}) le plus proche minimum local à droite (resp. à gauche) de i_0. Quitte à renverser l'ordre de $[\![0,N]\!]$, on peut supposer que $f(i_{-1}) \leq f(i_1)$. On notera également $i_2 \coloneqq \max\{y \geq i_1 \,:\, \forall\, i_1 \leq x \leq y,\ f(x) = f(i_1)\}$.
Pour $s \in [f(i_1), f(i_0)]$, soit $S_s \coloneqq [\![a_s, b_s]\!]$ le segment discret dont les bornes sont définies par

$$\begin{array}{rcl} a_s & \coloneqq & \min\{x \in [\![i_{-1}, i_0]\!] \,:\, f(x) \geq s\} \\ b_s & \coloneqq & \min\{x \in [\![i_2, N]\!] \,:\, f(x) \geq s\} - 1 \end{array}$$

(avec la convention que $b_s = N$ si ce dernier ensemble est vide).
De par nos choix, notamment la propriété de minimalité de i_0, on vérifie aisément que pour tout $s \in [f(i_1), f(i_0)]$, f est croissante (sous-entendu au sens large) sur $[\![a_s, i_0]\!]$, décroissante sur $[\![i_0, i_2]\!]$ et croissante sur $[\![i_2, b_s+1]\!]$ (le lecteur est fortement encouragé à faire un dessin).
Toujours pour $s \in [f(i_1), f(i_0)]$, posons pour tout $x \in E$,

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f}_s(x) & = & f(x)\mathbb{1}_{S_s^c}(x) + s\mathbb{1}_{S_s}(x) \\ \widehat{f}_s(x) & = & (f(x)-s)\mathbb{1}_{S_s}(x) \end{array}$$

On a bien $f_s = \widetilde{f}_s + \widehat{f}_s$ et on obtiendra la décomposition voulue grâce aux deux lemmes suivants.
Lemme 3 *Pour tout $s \in]f(i_1), f(i_0)[$, on a*

$$\nu[(f')^2] \quad \geq \quad \nu[(\widetilde{f}'_s)^2] + \nu[(\widehat{f}'_s)^2]$$

Preuve :
On calcule immédiatement que

$$\begin{array}{rcl} \nu[(f')^2] & = & \nu[(\widetilde{f}'_s + \widehat{f}'_s)^2] \\ & = & \nu[(\widetilde{f}'_s)^2] + \nu[(\widehat{f}'_s)^2] + 2\nu[\widetilde{f}'_s \widehat{f}'_s] \end{array}$$

puis que

$$\nu[\widetilde{f}'_s\widehat{f}'_s] \;=\; \nu(\{a_s-1,a_s\})(s-f(a_s-1))(f(a_s)-s)+\nu(\{b_s,b_s+1\})(f(b_s+1)-s)(s-f(b_s))$$

(toujours avec la convention que $\nu(\{N,N+1\})=0$). Or du fait que $s\in]f(i_1),f(i_0)[$, il apparaît que $f(i_{-1})\leq f(a_s-1)<s\leq f(a_s)\leq f(i_0)$ et $f(i_2)\leq f(b_s)<s\leq f(b_s+1)$, ce qui permet de constater que $\nu[\widetilde{f}'_s\widehat{f}'_s]\geq 0$, d'où l'inégalité annoncée.

■

Lemme 4 *Il existe* $s_0\in]f(i_1),f(i_0)[$, *tel que*

$$\mathrm{Var}(f,\mu) \;=\; \mathrm{Var}(\widetilde{f}_s,\mu)+\mathrm{Var}(\widehat{f}_s,\mu)$$

Preuve :
La différence entre les membres de gauche et de droite ci-dessus n'est autre que deux fois la covariance de $\widetilde{f}_s$ et de $\widehat{f}_s$ sous μ, laquelle vaut

$$\begin{aligned}\mu[(\widetilde{f}_s-\mu[\widetilde{f}_s])(\widehat{f}_s-\mu[\widehat{f}_s])] &= \mu[(\widetilde{f}_s-\mu[\widetilde{f}_s])\widehat{f}_s]\\ &= (s-\mu[\widetilde{f}_s])\mu[(f-s)\mathbb{1}_{S_s}] \qquad (5)\end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver $s\in]f(i_1),f(i_0)[$ tel que $\mu[(f-s)\mathbb{1}_{S_s}]=0$. Notons $i_3 \coloneqq b_{f(i_0)}+1$, du fait de la croissance de f sur $[\![i_{-1},i_0]\!]$ et sur $[\![i_2,i_3]\!]$, on se convainc facilement que l'application $\Psi\,:\,[f(i_1),f(i_0)]\ni s\mapsto\mu[(f-s)\mathbb{1}_{S_s}]$ est continue. Or la configuration de f sur $[\![i_{-1},i_3]\!]$ implique que $\Psi(f(i_1))>0$ et $\Psi(f(i_0))<0$, d'où l'existence de $s_0\in]f(i_1),f(i_0)[$ tel que $\Psi(s_0)=0$.

■

Notons $\widetilde{f}=\widetilde{f}_{s_0}$ et $\widehat{f}=\widehat{f}_{s_0}$, où s_0 a été choisi comme dans le lemme précédent. Pour terminer la preuve de la proposition 1, il reste à voir que $\widetilde{f}\notin\mathrm{Vect}(f,\mathbb{1})$. Pour cela notons que i_1 n'est plus un minimum local pour $\widetilde{f}$ (pour cette fonction on peut se laisser "descendre" de i_1 à i_{-1} et pourtant $\widetilde{f}(i_1)=s_0>f(i_1)\geq f(i_{-1})=\widetilde{f}(i_{-1})$), et il en découle que $\widetilde{f}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $af+b\mathbb{1}$ avec $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$. Par ailleurs, les inégalités $\widetilde{f}(i_{-1})<\widetilde{f}(i_0)$ et $f(i_{-1})<f(i_0)$ montrent aussi que $\widetilde{f}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $af+b\mathbb{1}$ avec $a\leq 0$ et $b\in\mathbb{R}$. D'où en fin de compte le résultat attendu.

3 Partage de l'entropie

Notre but ici est de montrer (2) dans la situation discrète. D'après les résultats de la section précédente, il suffit de considérer le cas où il existe un maximisant f (non constant) pour (1). Globalement notre démarche de preuve va être similaire à celle de la section précédente, dont on reprendra la plupart des notations.

Tout d'abord, remarquons que l'on peut désormais supposer $f\geq 0$, quitte à remplacer f par $|f|$, car on a $\nu[(|f|')^2]\leq\nu[(f')^2]$. Faisons maintenant l'hypothèse (à invalider) que f n'est pas monotone. Deux possibilités apparaissent : soit f admet un maximum local i dans $[\![1,N-1]\!]$ tel qu'il existe un minimum local dans $[\![0,i]\!]$ et un dans $[\![i,N]\!]$, soit ceci est vérifié par $-f$. Dans ce qui suit nous considérerons seulement le premier cas, le second se traiterait d'une manière très proche et est laissé au lecteur (il faut alors travailler avec la fonction à valeurs négatives $-f$).
On définit i_{-1}, i_0, i_1, i_2 et i_3, puis pour $s\in[f(i_1),f(i_0)]$, S_s, $\widetilde{f}_s$ et $\widehat{f}_s$ comme dans la section 2. Notre principale tâche va consister à "partager" l'entropie :

Lemme 5 *Il existe* $s_1\in]f(i_1),f(i_0)[$, *tel que*

$$\mathrm{Ent}(f^2,\mu) \;=\; \mathrm{Ent}(\widetilde{f}^2_{s_1},\mu)+\mathrm{Ent}((s+\widehat{f}_{s_1})^2,\mu)$$

Preuve :
On commence par remarquer que pour tout $s \in [f(i_1), f(i_0)]$ et toute fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, on a

$$\mu[F(f)] \quad = \quad \mu[F(\widetilde{f}_s)] + \mu[F(s + \widehat{f}_s)] - F(s) \tag{6}$$

En effet, par définition, on peut effectuer le développement suivant :

$$\begin{aligned} \mu[F(f)] &= \mu[\mathbb{1}_{S_s^c} F(\widetilde{f}_s)] + \mu[\mathbb{1}_{S_s} F(s + \widehat{f}_s)] \\ &= \mu[F(\widetilde{f}_s)] - \mu[\mathbb{1}_{S_s} F(s)] + \mu[F(s + \widehat{f}_s)] - \mu[\mathbb{1}_{S_s^c} F(s)] \\ &= \mu[F(\widetilde{f}_s)] + \mu[F(s + \widehat{f}_s)] - F(s) \end{aligned}$$

Notamment en appliquant ceci avec la fonction $F : \mathbb{R}_+ \ni u \mapsto u^2 \ln(u^2)$, il ressort que

$$\mathrm{Ent}(f^2, \mu) - \mathrm{Ent}(\widetilde{f}_{s_1}^2, \mu) - \mathrm{Ent}((s + \widehat{f}_{s_1})^2, \mu) \quad = \quad \varphi(y'_s) + \varphi(x'_s) - \varphi(y) - \varphi(x_s)$$

avec φ l'application convexe définie par

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \ni u \quad \mapsto \quad u \ln(u)$$

et

$$\begin{aligned} y'_s &= \mu[\widetilde{f}_s^2] \\ x'_s &= \mu[(s + \widehat{f}_s)^2] \\ y &= \mu[f^2] \\ x_s &= s^2 \end{aligned}$$

En ayant à nouveau recours à (6), mais avec F la fonction élévation au carré, il apparaît que $x_s + y = x'_s + y'_s$, c'est-à-dire que les segments $[x_s, y]$ et $[x'_s, y'_s]$ ont même milieu. Ainsi par convexité de φ, l'inégalité $\varphi(x_s) + \varphi(y) \geq \varphi(x'_s) + \varphi(y'_s)$ est équivalente à $|y - x_s| \geq |y'_s - x'_s|$. Ou encore, si l'on trouve un $s_1 \in]f(i_1), f(i_0)[$, tel que $|y - x_s| = |y'_s - x'_s|$, alors l'égalité annoncée dans le lemme précédent sera réalisée (la convexité de φ est même inutile pour cela). Or on calcule (toujours grâce à (6) avec F la fonction carré) que

$$\begin{aligned} y'_s - x'_s &= \mu[\widetilde{f}_s^2] - \mu[(s + \widehat{f}_s)^2] \\ &= \mu[f^2] + s^2 - 2\mu[(s + \widehat{f}_s)^2] \\ &= \mu[f^2] - s^2 - 2\mu[\widehat{f}_s^2] - 4s\mu[\widehat{f}_s] \\ &= y - x_s - 2\mu[\widehat{f}_s(\widehat{f}_s + 2s)] \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver $s \in]f(i_1), f(i_0)[$ tel que $\mu[\widehat{f}_s(\widehat{f}_s + 2s)] = 0$. Mais $\widehat{f}_s + 2s$ est une fonction positive alors que $\widehat{f}_s$ est positive pour $s = f(i_1)$ et négative pour $s = f(i_0)$. D'où le résultat voulu par continuité de l'application $[f(i_1), f(i_0)] \ni s \mapsto \mu[\widehat{f}_s(\widehat{f}_s + 2s)]$ et du fait que l'on se convainc sans difficulté qu'elle est non nulle aux bords.

■

Par ailleurs, d'après le lemme 3, on a pour tout $s \in]f(i_1), f(i_0)[$,

$$\begin{aligned} \nu[(f')^2] &\geq \nu[(\widetilde{f}'_s)^2] + \nu[(\widehat{f}'_s)^2] \\ &= \nu[(\widetilde{f}'_s)^2] + \nu[((s + \widehat{f}_s)')^2] \end{aligned}$$

En reprenant les notations et la preuve de ce lemme, on peut même être un peu plus précis : l'égalité n'est possible que si pour toute arête $a \in A$, $\widetilde{f}'_s(a)\widehat{f}'_s(a) = 0$, ce qui implique notamment que $f(a_s) = s$. Ainsi pour $s \in]f(i_1), f(i_0)[$, le segment discret S_s contient au moins trois points distincts, a_s, i_0 et i_1.

Or de ce qui précède on déduit que $\widetilde{f}_{s_1}$ et $s_1+\widehat{f}_{s_1}$ sont aussi des fonctions maximisantes pour (1) et que nécessairement

$$\nu[(f')^2] \quad = \quad \nu[(\widetilde{f}'_{s_1})^2]+\nu[((s_1+\widehat{f}_{s_1})')^2]$$

puisque sinon on aurait

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]} \quad &< \quad \frac{\mathrm{Ent}(\widetilde{f}^2_{s_1},\mu)+\mathrm{Ent}((s+\widehat{f}_{s_1})^2,\mu)}{\nu[(\widetilde{f}'_{s_1})^2]+\nu[((s_1+\widehat{f}_{s_1})')^2]}\\ &\leq \quad \max\left(\frac{\mathrm{Ent}(\widetilde{f}^2_{s_1},\mu)}{\nu[(\widetilde{f}'_{s_1})^2]},\frac{\mathrm{Ent}((s+\widehat{f}_{s_1})^2,\mu)}{\nu[((s_1+\widehat{f}_{s_1})')^2]}\right)\end{aligned}$$

(la première inégalité utilise que par construction $\mathrm{Ent}(f^2,\mu)>0$). Il existe donc trois points consécutifs (de S_{s_1}) où $\widetilde{f}_{s_1}$ prend la même valeur (en l'occurrence s_1) et nous allons maintenant vérifier que ceci n'est pas possible, plus précisément que ceci impliquerait que $\widetilde{f}_{s_1}$ est constant, ce qui n'est pas juste (car $\widetilde{f}_{s_1}(i_{-1})<\widetilde{f}_{s_1}(i_0)$). En effet, un calcul variationnel autour d'une fonction maximisante f montre que cette fonction doit vérifier pour tout $i\in E$ (avec les conventions usuelles),

$$C(\mu,\nu)[\nu(\{i,i+1\})(f(i)-f(i+1))+\nu(\{i-1,i\})(f(i)-f(i-1))] \quad = \quad \mu(i)f(i)\ln\left(\frac{f^2(i)}{\mu[f^2]}\right)$$

Rappelons que l'on s'est ramené à la situation où μ, ν et $C(\mu,\nu)$ sont strictement positifs (voir la discussion précédant le lemme 2), ainsi si f prend une même valeur v en trois points consécutifs $y-1$, y et $y+1$, avec $0<y<N$, alors l'équation précédente en $i=y$ impose que $v\ln(v^2/\mu[f^2])=0$, c'est-à-dire $v=0$ ou $v=\sqrt{\mu[f^2]}$. En appliquant alors plutôt l'équation ci-dessus en $i=y+1$, on obtient $f(y+2)=f(y+1)$, du moins si $y\leq N-2$. De même pour $i=y-1$, $f(y-2)=v$ si $y\geq 2$. On peut ainsi propager l'égalité $f(i)=v$ de proche en proche pour aboutir à la conclusion que f est constamment égal à v.
Ces arguments terminent la démonstration de (2) en remplaçant le recours au lemme 2. Car s'il reste vrai que la connaissance de $\mu[f^2]$ et de $f(0)$ détermine une fonction f maximisante de (1), de par la structure linéaire du graphe E (toujours à μ et ν donnés et vérifiant $C(\mu,\nu)>0$ et $\nu>0$ sur A, comme on s'est ramené à les supposer dans la section précédente), par contre ceci n'implique plus le lemme 2 à cause de la non affinité en $f(i)$ du terme $\mu(i)f(i)\ln(f^2(i)/\mu[f^2])$ ci-dessus. Ce lemme est d'ailleurs toujours faux dans le contexte des inégalités de Sobolev logarithmiques. Soit en effet à nouveau f une fonction à valeurs positives maximisant (1). En perturbant f par une fonction constante et en effectuant un calcul variationnel, on obtient qu'elle vérifie $\mu[f\ln(f/\mu[f^2])]=0$. Posons $F(t)=\mu[(f+t)\ln((f+t)/\mu[(f+t)^2])]$ pour tout $t\geq 0$. En dérivant deux fois cette expression sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$F''(t) \quad = \quad 2\int\frac{1}{f+t}\,d\mu-2\frac{\mu[f+t]}{\mu[(f+t)^2]}\left(2-\frac{\mu[f+t]^2}{\mu[(f+t)^2]}\right)$$

En utilisant l'inégalité de Jensen $\mu[1/(f+t)]\geq 1/\mu[f+t]$ et le fait que l'application $[0,1]\ni x\mapsto x(2-x)$ est bornée par 1, il ressort que F'' est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$ si f n'est pas μ-p.s. constant (considérer le cas d'égalité dans l'inégalité de Jensen). Ainsi, il peut exister au plus deux $t\geq 0$ tels que $F(t)=0$.

Remarque 6 L'inégalité $\mu[\widehat{f}_{f(i_1)}(\widehat{f}_{f(i_1)}+2f(i_1))]>0$ ne permet pas de déduire que $\mathrm{Ent}(f^2,\mu)<\mathrm{Ent}(\widetilde{f}^2_{f(i_1)},\mu)+\mathrm{Ent}((f(i_1)+\widehat{f}_{f(i_1)})^2,\mu)$, ceci n'étant vérifié que sous des conditions particulières sur les signes respectifs de $y'_{f(i_1)}-x'_{f(i_1)}$ et $y-x_{f(i_1)}$ (une observation similaire vaut en $s=f(i_0)$). Le fait que $y'_s-x'_s$ et $y-x_s$ peuvent changer de signe quand s parcourt $[f(i_1),f(i_0)]$ (le cas le plus gênant étant quand ceci intervient justement au moment où $\mu[\widehat{f}_s(\widehat{f}_s+2s)]$ s'annule) joue le même rôle parasite que le facteur $s-\mu[\widetilde{f}_s]$ qui était apparu en (5). A priori, nous ne sommes donc pas sûrs que l'on puisse trouver un $s\in[f(i_1),f(i_0)]$ tel que l'une des deux fonctions $\widetilde{f}_s$ ou $s+\widehat{f}_s$ soit "strictement plus maximisante" que f. Par contre dans le cas du trou spectral, on pouvait tout de même aboutir à cette conclusion, en utilisant de plus le fait que l'application $[f(i_1),f(i_0)]\ni s\mapsto s-\mu[\widetilde{f}_s]$ est croissante (plus précisément, une analyse complémentaire fournit aisément que $[f(i_1),f(i_0)]\ni s\mapsto s-\mu[\widetilde{f}_s]$ est croissante).

□

4 Situation continue

Nous revenons donc au premier cadre considéré dans l'introduction. Nous ne traiterons que le cas de la constante de Sobolev logarithmique, car celui de la constante de Poincaré s'effectuerait de manière très similaire. Comme déjà indiqué, nous allons ramener la situation continue à la discrète, ce qui permet de donner à la preuve une petite inclinaison probabiliste. Nous envisagerons également l'autre possibilité consistant à adapter les preuves précédentes et qui amène à poursuivre l'analyse des fonctions (presque) minimisantes. Mais quelle que soit l'alternative choisie, le début de la démonstration semble passer par une première étape de régularisation.

Pour $M>0$, soit $\mathcal{C}_{[-M,M]}$ (respectivement $\mathcal{D}_{[-M,M]}$) le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ (resp. de $\mathcal{D}$) formé des fonctions absolument continues dont la dérivée faible s'annule p.p. sur $]-\infty,-M]\cup[M,+\infty[$. On pose également

$$\begin{aligned} C_{[-M,M]}(\mu,\nu) &\coloneqq \sup_{f\in\mathcal{C}_{[-M,M]}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]} \\ D_{[-M,M]}(\mu,\nu) &\coloneqq \sup_{f\in\mathcal{D}_{[-M,M]}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]} \end{aligned}$$

On se convainc sans difficulté que ces deux quantités sont croissantes en $M>0$ et qu'elles convergent pour M grand, respectivement vers $C(\mu,\nu)$ et

$$D(\mu,\nu) \coloneqq \sup_{f\in\mathcal{D}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]} \quad \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

Notons $\nu_{[-M,M]}$ la restriction de ν à $[-M,M]$ (c'est-à-dire nulle en dehors de cet intervalle) et $\mu_{[-M,M]}$ la probabilité obtenue en rabattant sur les extrémités $-M$ et M la masse se trouvant en dehors de $[-M,M]$, i.e. définie par

$$\mu_{[-M,M]}(B) \coloneqq \mu(B\cap]-M,M[)+\mu(]-\infty,M])\delta_{-M}(B)+\mu([M,+\infty[)\delta_M(B)$$

pour tout borélien B de $\mathbb{R}$. L'intérêt de ces deux mesures est que $C_{[-M,M]}(\mu,\nu)=C(\mu_{[-M,M]},\nu_{[-M,M]})$ et $D_{[-M,M]}(\mu,\nu)=D(\mu_{[-M,M]},\nu_{[-M,M]})$, ainsi les convergences précédentes permettent de se restreindre au cas où μ et ν sont à support dans le compact $[-M,M]$, $M>0$ étant dorénavant fixé. On se contentera aussi de ne considérer que des fonctions définies sur $[-M,M]$. Notons λ la restriction de la mesure de Lebesgue à $[-M,M]$ et par abus de language, on appellera aussi ν la dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à λ (celle-ci existe sans restriction sur ν, quitte à lui permettre de prendre la valeur $+\infty$, voir par exemple [10]). Puisque les dérivées faibles ne sont définies que p.p., il est bien connu que $C(\mu,\nu)$ (ou $D(\mu,\nu)$) n'est pas modifié si ν est remplacé par la mesure admettant ν comme densité par rapport à λ, ce que nous supposerons désormais fait. On se ramène ensuite à faire l'hypothèse que la fonction ν est minorée par une constante strictement positive p.p. En effet, ceci découle du fait que pour tout $f\in\mathcal{C}$, on a

$$\lim_{\eta\to 0_+} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\int (f')^2\,(\eta\wedge\nu)d\lambda} = \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]}$$

et que cette convergence a lieu en croissant. Ainsi par une propriété d'échange de suprema, l'égalité voulue est préservée par ce passage à la limite. Ainsi dans ce qui suit $\eta > 0$ sera fixé de sorte que $\nu \geq \eta$ partout sur $[-M, M]$, i.e. on a choisi une version de ν vérifiant ceci, mais attention, ν peut encore prendre la valeur $+\infty$ (on aura remarqué que l'opération correspondante de majoration de ν serait plus délicate à obtenir).

La procédure suivante consiste à modifier μ et est un peu moins immédiate, on a besoin d'une préparation générale :

Lemme 7 *Soit μ une probabilité sur un espace mesurable, sur lequel on se donne aussi f, g deux fonctions mesurables. On suppose qu'en norme uniforme on a $\|g - f\|_\infty \leq \epsilon \leq 1$ et que l'oscillation de f (i.e. $\mathrm{osc}(f) := \sup f - \inf f$) est majorée par a, où ϵ, a sont des réels positifs. Il existe alors un nombre $b(a) \geq 0$ ne dépendant que de a tel que*

$$\left|\mathrm{Ent}(g^2, \mu) - \mathrm{Ent}(f^2, \mu)\right| \leq b(a)\epsilon$$

Preuve :

Notons que $|f|$ et $|g|$ vérifient les mêmes hypothèses que f et g, ainsi on n'introduit pas de restriction supplémentaire en supposant de plus que f et g sont à valeurs positives.

On distingue ensuite deux situations, suivant que $\mu[f]$ est “grand” ou “petit”. Commençons par traiter le cas où $\mu[f] \leq 2 + 2a$. Ceci nous assure que f est majoré par $2 + 3a$ et g par $3 + 3a$. Or sur l'intervalle $[0, 3 + 3a]$, l'application $t \mapsto t^2 \ln(t^2)$ admet une dérivée bornée par une quantité finie $b_1(a)$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} \left|\mu[g^2 \ln(g^2)] - \mu[f^2 \ln(f^2)]\right| &\leq \mu[\left|g^2 \ln(g^2) - f^2 \ln(f^2)\right|] \\ &\leq b_1(a)\mu[|g - f|] \\ &\leq b_1(a)\epsilon \end{aligned}$$

De même en utilisant l'inégalité en norme dans $\mathbb{L}^2(\mu)$, $\left|\sqrt{\mu[g^2]} - \sqrt{\mu[f^2]}\right| \leq \sqrt{\mu[(g - f)^2]}$, on obtient

$$\left|\mu[g^2] \ln(\mu[g^2]) - \mu[f^2] \ln(\mu[f^2])\right| \leq b_1(a)\epsilon$$

d'où en fin de compte l'inégalité voulue sur la différence entre entropies avec $b(a) = 2b_1(a)$.

Intéressons-nous maintenant au cas où $\mu[f] > 2 + 2a$. Il semble plus commode de considérer alors l'application $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto t \ln(t)$. En effectuant un développement avec reste au premier ordre, centré en $\mu[f^2]$, on trouve un $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$\mu[g^2] \ln(\mu[g^2]) = \mu[f^2] \ln(\mu[f^2]) + (1 + \ln[\mu[f^2] + \theta(\mu[g^2] - \mu[f^2])])(\mu[g^2] - \mu[f^2])$$

En effectuant la même opération ponctuellement, on obtient plutôt une fonction mesurable $\widetilde{\theta}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que l'on ait partout,

$$g^2 \ln(g^2) = f^2 \ln(f^2) + (1 + \ln(f^2 + \widetilde{\theta}(g^2 - f^2))(g^2 - f^2)$$

En intégrant ceci par rapport à μ et en tenant compte de l'égalité précédente, il apparaît que

$$\mathrm{Ent}(g^2, \mu) - \mathrm{Ent}(f^2, \mu) = \mu\left[(\ln(f^2 + \widetilde{\theta}(g^2 - f^2)) - \ln[\mu[f^2] + \theta(\mu[g^2] - \mu[f^2])])(g^2 - f^2)\right] \quad (7)$$

Cependant, observons que

$$\begin{aligned} f^2 + \widetilde{\theta}(g^2 - f^2) &\geq f^2 \wedge g^2 \\ &\geq (\mu[f] - \mathrm{osc}(f) - 1)^2 \\ &\geq (\mu[f] - a - 1)^2 \\ &\geq \frac{\mu[f]^2}{4} \end{aligned}$$

et de même

$$\mu[f^2]+\theta(\mu[g^2]-\mu[f^2]) \quad \geq \quad \frac{\mu[f]^2}{4}$$

On obtient ainsi l'inégalité ponctuelle

$$\begin{aligned}&\left|\ln(f^2+\widetilde{\theta}(g^2-f^2))-\ln(\mu[f^2]+\theta(\mu[g^2]-\mu[f^2]))\right|\\ &\quad\leq \quad 4\mu[f]^{-2}\left|f^2+\widetilde{\theta}(g^2-f^2)-\mu[f^2]-\theta(\mu[g^2]-\mu[f^2])\right|\end{aligned}$$

Etudions la dernière valeur absolue, que l'on peut majorer par

$$\begin{aligned}&(f+\sqrt{\mu[f^2]})\left|f-\sqrt{\mu[f^2]}\right|+(f+g)\left|f-g\right|+(\sqrt{\mu[g^2]}+\sqrt{\mu[f^2]})\left|\sqrt{\mu[g^2]}-\sqrt{\mu[f^2]}\right|\\ &\quad\leq \quad 2(\mu[f]+a)a+(2\mu[f]+2a+1)\epsilon+(2\mu[f]+2a+1)\epsilon\\ &\quad\leq \quad (2\mu[f]+2a+1)(a+2)\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a comme ci-dessus,

$$\left|g^2-f^2\right| \quad \leq \quad (2\mu[f]+2a+1)\epsilon$$

d'où en revenant à (7), il apparaît que

$$\left|\mathrm{Ent}(g^2,\mu)-\mathrm{Ent}(f^2,\mu)\right| \quad \leq \quad 4\frac{(a+2)(2\mu[f]+2a+1)^2}{\mu[f]^2}\epsilon$$

et dans ce cas le lemme est vérifié avec $b(a)=b_2(a)$, où

$$b_2(a) \quad \coloneqq \quad \sup_{t\geq 2+2a} 4\frac{(a+2)(2t+2a+1)^2}{t^2} \qquad < +\infty$$

■

Utilisons ce résultat technique pour mesurer l'influence de certaines modifications de μ sur $C(\mu,\nu)$. Plus précisément, pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, posons pour tout $0\leq i\leq n$, $x_{n,i}\coloneqq -M+i2M/n$ et introduisons la probabilité

$$\mu_n \quad \coloneqq \quad \sum_{0\leq i\leq n}\mu([x_{n,i},x_{n,i+1}[)\delta_{x_{n,i}}$$

avec la convention que $x_{n,n+1}=+\infty$.

Lemme 8 *En reprenant les notations du lemme précédent, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,*

$$|C(\mu_n,\nu)-C(\mu,\nu)| \quad \leq \quad b(\sqrt{2M})\sqrt{\frac{2M}{n}}$$

Preuve :

Notons $\mathcal{C}(\nu)$ l'ensemble des fonctions absolument continues f vérifiant $\nu[(f')^2]=1$, de sorte que

$$C(\mu,\nu) \quad = \quad \sup_{f\in\mathcal{C}(\nu)} \mathrm{Ent}(f^2,\mu)$$

et on dispose d'une formule similaire pour $C(\mu_n,\nu)$. Pour se convaincre de la borne qui nous intéresse, il suffit donc de voir que pour tout $f\in\mathcal{C}(\nu)$, on a

$$\left|\mathrm{Ent}(f^2,\mu_n)-\mathrm{Ent}(f^2,\mu)\right| \quad \leq \quad b(\sqrt{2M})\sqrt{\frac{2M}{n}}$$

Pour ceci, récrivons $\mathrm{Ent}(f^2,\mu_n)$ sous la forme $\mathrm{Ent}(f_n^2,\mu)$ où f_n est la fonction qui pour tout $0\leq i\leq n$, vaut $f(x_{n,i})$ sur $[x_{n,i},x_{n,i+1}[$. Il nous reste à évaluer $\mathrm{osc}(f)$ et $\|f_n-f\|_\infty$ pour pouvoir appliquer le lemme 7. Mais ces estimations, et par conséquence le résultat voulu, découlent aisément de l'application suivante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\forall\, x,y\in[-M,M],\qquad |f(y)-f(x)| &= \left|\int_{[x,y]} f'\,d\lambda\right|\\ &\leq \sqrt{\int_{[x,y]}(f')^2\,d\nu}\sqrt{\int_{[x,y]}\frac{1}{\nu}\,d\lambda}\\ &\leq \eta^{-1/2}\sqrt{|y-x|}\end{aligned}$$

cette dernière majoration étant valable pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(\nu)$.

■

Evidemment, la preuve ci-dessus montre aussi que

$$|D(\mu_n,\nu)-D(\mu,\nu)| \;\leq\; b(\sqrt{2M})\sqrt{\frac{2M}{n}}$$

ainsi pour se convaincre de l'égalité $C(\mu,\nu)=D(\mu,\nu)$, il suffit de voir que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $C(\mu_n,\nu)=D(\mu_n,\nu)$. Mais ce problème se réduit au contexte discret. En effet, comme avant le lemme 2, les valeurs de $f(x_{n,i})$ étant fixées, on est confronté à la minimisation, pour tout $0\leq i<n$ donné, de la quantité $\int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}}(f')^2\,\nu d\lambda$. Il s'agit là d'un problème d'optimisation simple à résoudre, la valeur minimale est

$$\left(\int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}}\frac{1}{\nu}\,d\lambda\right)^{-1}(f(x_{n,i+1})-f(x_{n,i}))^2$$

et est atteinte pour une fonction monotone sur le segment $[x_{n,i},x_{n,i+1}]$. On est donc ramené au problème discret sur $n+1$ points associé à la probabilité $\widetilde{\mu}_n$ et à la mesure $\widetilde{\nu}_n$ définies respectivement par

$$\begin{aligned}\forall\ 0\leq i\leq n,\qquad \widetilde{\mu}_n(i) &\coloneqq \mu_n(x_{n,i})\\ \forall\ 0\leq i<n,\qquad \widetilde{\nu}_n(\{i,i+1\}) &\coloneqq \left(\int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}}\frac{1}{\nu}\,d\lambda\right)^{-1}\end{aligned}$$

Les sections 2 et 3 nous permettent alors de conclure.

Dans une perspective peut-être plus analyste, remarquons que les lemmes 7 et 8 permettraient aussi de régulariser μ, que l'on pourrait supposer admettre une densité de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à λ.

Mentionnons à présent une approche alternative, s'inspirant directement de la méthode des sections 2 et 3. A priori deux problèmes se posent dans cette perspective : d'une part l'existence d'une fonction minimisante (même pour la constante de Poincaré) et d'autre part le fait que même si elle existe, l'ensemble de ses minima et maxima globaux peut avoir une infinité de composantes connexes (c'est-à-dire qu'elle oscille une infinité de fois, ce qui est gênant pour nous, voir les considérations qui précèdent le lemme 3). Pour les contourner, on peut procéder comme suit. On se replace dans le contexte d'avant le lemme 7.

Commençons par étendre au cas continu la notion de minimum et maximum locaux introduite dans la section 2, en y remplaçant les segments discrets par des continus. Pour $f\in\mathcal{C}$, on désignera par $\mathcal{M}(f)$ l'ensemble des minima et maxima locaux de f. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}_p$ l'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{C}$ qui sont telles que $\mathcal{M}(f)$ admet au plus p composantes connexes. Ainsi on vérifie que $\mathcal{C}_1$ (respectivement $\mathcal{C}_2$) est l'ensemble des fonctions constantes (resp. monotones). On pose aussi $\mathcal{C}_\infty\coloneqq\cup_{p\in\mathbb{N}^*}\mathcal{C}_p$, pour lequel on a le résultat préliminaire suivant :

Lemme 9 *On a*

$$C(\mu,\nu) \quad = \quad \sup_{f\in\mathcal{C}_\infty} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]}$$

Preuve :

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions mesurables $g\,:\,[-M,M]\to\mathbb{R}$ appartenant à $\mathbb{L}^1([-M,M],\lambda)$ pour lesquelles on peut trouver $n\in\mathbb{N}^*$ et $-M=x_0<x_1<\cdots<x_n=M$ tels que pour tout $0\leq i<n$, g est de signe constant sur $]x_i,x_{i+1}[$ (0 étant considéré à la fois de signes négatif et positif). Ainsi $\mathcal{C}_\infty$ n'est autre que l'ensemble des primitives d'éléments de $\mathcal{F}$.
Il suffit alors de vérifier que $\{g\in\mathcal{F}\,:\,\nu[g^2]\leq 1\}$ est dense au sens $\mathbb{L}^2(\nu)$ dans la boule unité de cet espace. En effet, soit $f\in\mathcal{C}$ avec $\nu[(f')^2]=1$. D'après la propriété précédente, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ convergeant vers f'. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\forall\, x\in[-M,M],\qquad G_n(x) \quad = \quad f(-M)+\int_{-M}^{x} g_n(y)\,dy$$

Du fait de la minoration $\nu\geq\eta$, on a clairement que les G_n convergent uniformément vers f pour n grand. Et puisque $\mathrm{osc}(f)<+\infty$, une application du lemme 7 montre que

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ent}(G_n^2,\mu) \quad = \quad \mathrm{Ent}(f^2,\mu)$$

d'où l'égalité annoncée dans le lemme.
Pour la densité précédente, soit $g\in\mathbb{L}^2(\nu)$ avec $\nu[g^2]=1$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons

$$g_n \quad \coloneqq \quad g\mathbb{1}_{\{\nu\leq n,|g|\leq n\}}$$

Par convergence dominée, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{L}^2(\nu)$ vers g. Cependant, pour $n\in\mathbb{N}$ fixé, la mesure $(\nu\wedge n)d\lambda$ est régulière (au sens des propriétés d'approximations interne et externe des boréliens, voir par exemple le livre de Rudin [15]), on peut donc trouver une suite $(\widetilde{g}_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$ telle que

$$\lim_{m\to\infty}\int(\widetilde{g}_{n,m}-g_n)^2\,(\nu\wedge n)d\lambda \quad = \quad 0$$

Ainsi en posant pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\widehat{g}_{n,m}\coloneqq\widetilde{g}_{n,m}\mathbb{1}_{\{\nu\leq n,|g|\leq n\}}$, qui reste un élément de $\mathcal{F}$, on a aussi

$$\lim_{m\to\infty}\int(\widehat{g}_{n,m}-g_n)^2\,d\nu \quad = \quad 0$$

ce qui termine la démonstration de la densité voulue.

■

On en déduit que

$$C(\mu,\nu) \quad = \quad \lim_{p\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{C}_p}\frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\nu[(f')^2]}$$

Cependant soient $p\geq 3$ et $f\in\mathcal{C}_p\setminus\mathcal{C}_2$, on peut appliquer à cette fonction les considérations de la section précédente et construire $\widetilde{f}\in\mathcal{C}_{p-1}$ et $\widehat{f}\in\mathcal{C}_4$ tels que

$$\begin{array}{rcl}\nu[(f')^2] & = & \nu[(\widetilde{f}')^2]+\nu[(\widehat{f}')^2]\\ \mathrm{Ent}(f^2,\mu) & = & \mathrm{Ent}(\widetilde{f}^2,\mu)+\mathrm{Ent}(\widehat{f}^2,\mu)\end{array}$$

Soyons un peu plus précis. Pour $g\in\mathcal{C}$, on dit qu'une composante connexe de $\mathcal{M}(g)$ est interne si elle ne contient ni $-M$ ni M. On notera $\widetilde{\mathcal{M}}(g)$ la réunion des composantes connexes internes de $\mathcal{M}(g)$. On introduit ensuite un ensemble $C_3 \subset \widehat{C}_4 \subset C_4$ en imposant que $\widehat{C}_4 \cap (C_4 \setminus C_3)$ est formé des fonctions $g \in C_4 \setminus C_3$ telles que $\min_{\widetilde{\mathcal{M}}(g)} g \leq g(-M), g(M) \leq \max_{\widetilde{\mathcal{M}}(g)} g$. L'intérêt de cet ensemble $\widehat{C}_4$ sera double pour nous : d'une part dans la construction ci-dessus on a $\widehat{f} \in \widehat{C}_4$ et d'autre part si $g \in \widehat{C}_4 \setminus C_2$ alors le $\widetilde{g}$ obtenu par la procédure précédente est monotone. Cependant le seul fait que $\widehat{f} \in \mathcal{C}_4$ montrait déjà que pour tout $p \geq 5$, on a

$$\sup_{f \in \mathcal{C}_p} \frac{\mathrm{Ent}(f^2, \mu)}{\nu[(f')^2]} \quad = \quad \sup_{f \in \mathcal{C}_{p-1}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2, \mu)}{\nu[(f')^2]}$$

et par récurrence on aboutit au fait que cette quantité n'est autre que $\sup_{f \in \mathcal{C}_4} \mathrm{Ent}(f^2, \mu)/\nu[(f')^2]$. De manière plus détaillée, les observations précédentes impliquent même que

$$C(\mu, \nu) \quad = \quad \sup_{f \in \widehat{\mathcal{C}}_4} \frac{\mathrm{Ent}(f^2, \mu)}{\nu[(f')^2]}$$

Soit donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\widehat{\mathcal{C}}_4$ vérifiant $\nu[(f_n')^2] = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $C(\mu, \nu) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Ent}(f_n^2, \mu)$. On peut distinguer deux situations : soit on peut extraire de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite (qui sera toujours notée de la même manière) telle que $(f_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, soit on a $\liminf_{n \to \infty} |f_n(0)| = +\infty$. Ce dernier cas correspond à l'égalité $C(\mu, \nu) = A(\mu, \nu)/2$ dont le traitement revient à celui de la constante de Poincaré qui est laissé au lecteur. On se place donc désormais dans la première situation évoquée ci-dessus. Par compacité faible de la boule unité de $\mathbb{L}^2(\nu)$, on peut extraire une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que la suite $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans $\mathbb{L}^2(\nu)$. Associée à la convergence de $(f_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$, cette convergence faible implique que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-M, M]$ vers une fonction f qui admet une dérivée faible f' vérifiant $\nu[(f')^2] \leq 1$ (de par la semi-continuité inférieure de la norme pour la topologie faible). Cependant, l'uniforme continuité des f_n pour $n \in \mathbb{N}$ (provenant de la majoration de leur coefficient de Hölder d'ordre 1/2 par $\eta^{-1/2}$), nous assure, via le théorème d'Ascoli, que la convergence des f_n vers f est en fait uniforme sur le compact $[-M, M]$. Notamment on obtient

$$\mathrm{Ent}(f^2, \mu) \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \mathrm{Ent}(f_n^2, \mu) \quad = \quad C(\mu, \nu)$$

Ecartons la situation triviale où $C(\mu, \nu) = 0$ (qui correspond aux cas où μ est une masse de Dirac ou $\nu = +\infty$ p.p. sur l'enveloppe convexe du support de μ), on obtient alors

$$\frac{\mathrm{Ent}(f^2, \mu)}{\nu[(f')^2]} \quad \geq \quad C(\mu, \nu)$$

avec inégalité stricte si $0 \leq \nu[(f')^2] < 1$, d'où nécessairement $\nu[(f')^2] = 1$. Ainsi f est une fonction maximisante pour (1), qui plus est appartient à $\widehat{\mathcal{C}}_4$, comme l'on s'en convainc facilement (quitte à extraire une sous-suite, on peut exiger que le nombre (compris entre 0 et 2) de composantes connexes internes est le même pour chacune des f_n et qu'il existe un point en chacune de ces composantes qui converge dans $[-M, M]$ pour n grand, ce qui permet de voir a posteriori que $f \in \widehat{\mathcal{C}}_4$). Si f n'est pas déjà monotone, appliquons lui à nouveau la procédure de la section précédente pour construire $\widetilde{f}$ et $\widehat{f}$. Puisque f est maximisante, ces deux fonctions doivent l'être également, or vu l'appartenance de f à $\widehat{\mathcal{C}}_4$, $\widetilde{f}$ est nécessairement monotone. Ces arguments permettent donc de conclure que $C(\mu, \nu) = D(\mu, \nu)$.

Remarque 10 Cette dernière démonstration s'appuie donc partiellement sur l'existence d'une fonction maximisante pour (1), mais contrairement à l'approche de Chen et Wang [5, 7] (dans le cas de la constante de Poincaré), nous n'avons pas cherché à exploiter l'équation qu'elle satisfait. Plus généralement, soit $S(\mu)$ l'enveloppe convexe du support de μ et notons $[s_-, s_+]$ sa fermeture dans la droite réelle achevée $\mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$. En désignant toujours par ν la densité de ν par rapport à λ, faisons l'hypothèse que

$$\int_{S(\mu)} \frac{1}{\nu} \, d\lambda \quad < \quad +\infty$$

On peut alors montrer qu'il existe une fonction maximisante pour (1) si $C(\mu,\nu) > A(\mu,\nu)/2$ (mais ces deux conditions ne sont pas nécessaires, comme on peut s'en convaincre en considérant pour μ et ν la distribution gaussienne standard). En effet, fixons $o \in S(\mu)$ et définissons

$$\forall\, x \in S(\mu), \qquad F(x) \quad \coloneqq \quad \int_o^x \frac{1}{\nu(y)} \, dy$$

Par la condition précédente, F est prolongeable de manière continue sur $[s_-, s_+]$. Considérons ensuite une fonction absolument continue f dont la dérivée faible vérifie $\int (f')^2 \, d\nu \leq 1$. En appliquant comme précédemment une inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient que

$$\forall\, x, y \in S(\mu), \qquad |f(y) - f(x)| \quad \leq \quad \sqrt{|F(y) - F(x)|}$$

et il en découle par le critère de Cauchy que f est aussi prolongeable de manière continue sur $[s_-, s_+]$. Il est alors possible de reprendre les arguments précédents sur ce compact (en tenant compte du fait que pour tout segment $I \subset [s_-, s_+]$, $\nu^{-1}\mathbb{1}_I \in \mathbb{L}^2(S(\mu), \nu)$, ceci permettant d'obtenir un convergence simple à partir de la compacité faible de la boule unité de $\mathbb{L}^2(S(\mu), \nu)$), pour voir qu'en dehors du cas d'égalité $C(\mu,\nu) = A(\mu,\nu)/2$, il existe une fonction f maximisante pour (1) (et puisque l'on sait que l'on peut se contenter de considérer des fonctions monotones, on peut même remplacer le théorème d'Ascoli par l'un de ceux de Dini). En effectuant un calcul variationnel autour de cette fonction, on se rend compte qu'elle satisfait deux conditions :

$$\int_{S(\mu)} f \ln\left(\frac{f^2}{\mu[f^2]}\right) d\mu \quad = \quad 0$$

et p.p. en $x \in S(\mu)$,

$$C(\mu,\nu)\nu(x)f'(x) \quad = \quad \int_{[s_-,x]} f \ln\left(\frac{f^2}{\mu[f^2]}\right) d\mu \tag{8}$$

Evidemment si l'on suppose de plus la fonction ν absolument continue et μ absolument continue par rapport à λ, on en déduit par une différentiation supplémentaire une équation du second ordre (non-linéaire en le terme d'ordre 0) satisfaite par f.
Enfin si encore de plus $[s_-, s_+] \subset \mathbb{R}$, $\nu(s_-) > 0$ et $\nu(s_+) > 0$, l'équation (8) permet de récupérer une condition de Neumann pour f : $f'(s_-) = f'(s_+) = 0$.

□

5 Extensions

Nous présentons ici quelques généralisations des résultats précédents, correspondant à des modifications des quantités intervenant dans (1).

Commençons par modifier le terme d'énergie, il s'agit de l'extension la plus naturelle pour nous, car elle correspond à des inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées qui semblent intéressantes (voir Wu [17] et Gentil, Guillin et Miclo [9]).
On considère d'abord la situation discrète pour laquelle on veut remplacer $\nu[(f')^2]$ par

$$\mathcal{E}_\nu(f^2, \ln(f^2)) \quad \coloneqq \quad \sum_{\{l,l+1\}\in A} \nu(\{l,l+1\})[f^2(l+1) - f^2(l)][\ln(f^2(l+1)) - \ln(f^2(l))]$$

pour tout $f \in \mathcal{C}$, notons que cette quantité reste homogène d'ordre 2.

Proposition 11 *Plaçons-nous dans le cas où $E = \mathbb{Z}$, pour lequel on généralise les notations introduites précédemment. On a*

$$\sup_{f\in\mathcal{C}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\mathcal{E}_\nu(f^2,\ln(f^2))} = \sup_{f\in\mathcal{D}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\mathcal{E}_\nu(f^2,\ln(f^2))}$$

On notera désormais $E(\mu,\nu)$ le membre de gauche de l'égalité ci-dessus. Le fait de considérer $\mathbb{Z}$ n'apporte pas de difficulté supplémentaire, car comme dans la section 4, on se ramène immédiatement à ne considérer que la situation finie où $E = \{0, ..., N\}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, quitte à rabattre de la masse sur les extrémités et à translater le segment obtenu. Toutefois, profitons-en pour signaler l'exemple non fini le plus célèbre pour lequel la constante précédente est finie. Il s'agit des lois de Poisson sur $\mathbb{N}$: soit $\alpha > 0$ et prenons

$$\begin{aligned} \forall\, l \in \mathbb{N}, \qquad \mu(\{l\}) &:= \frac{\alpha^l}{l!}\exp(-\alpha) \\ \nu(\{l, l+1\}) &:= \mu(\{l\}) \end{aligned}$$

Il est alors connu (cf. par exemple la section 1.6 du livre [1] de Ané, Blachère, Chafaï, Fougères, Gentil, Malrieu, Roberto et Scheffer) que $E(\mu,\nu)$ vaut α.
Pour se convaincre de la proposition 11, il faut réinspecter la preuve des sections 2 et 3 en trois points.
• Comme dans le cas de l'inégalité de Sobolev logarithmique, on retombe à une constante multiplicative près sur le problème de l'estimation de la constante de Poincaré s'il existe une suite minimisante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{E}_\nu(f_n^2,\ln(f_n^2)) &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} |f_n(0)| &= +\infty \end{aligned}$$

En effet, il est bien connu (voir par exemple le lemme 2.6.6 du livre de Ané et al. [1]) que

$$\forall\, f \in \mathcal{C}, \qquad \mathcal{E}_\nu(f^2,\ln(f^2)) \geq 4\nu[(f')^2]$$

ainsi la première condition ci-dessus assure que les oscillations des f_n sont bornées en $n \in \mathbb{N}$ (on se sera au préalable ramené à la situation $\nu > 0$). Cette observation permet d'effectuer des développements limités montrant l'équivalent suivant pour n grand :

$$\frac{\mathrm{Ent}(f_n^2,\mu)}{\mathcal{E}_\nu(f_n^2,\ln(f_n^2))} \sim \frac{\mathrm{Var}(f_n,\mu)}{8\nu[(f_n')^2]}$$

duquel on déduit aisément que

$$\begin{aligned} \sup_{f\in\mathcal{C}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\mathcal{E}_\nu(f^2,\ln(f^2))} &= \frac{A(\mu,\nu)}{8} \\ &= \sup_{f\in\mathcal{D}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\mathcal{E}_\nu(f^2,\ln(f^2))} \end{aligned}$$

Il suffit donc de considérer les situations où il existe une suite minimisante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{E}_\nu(f_n^2,\ln(f_n^2)) &= 1 \\ \limsup_{n\to\infty} |f_n(0)| &< \infty \end{aligned}$$

auxquels cas on peut extraire une sous-suite convergeant vers un maximisant pour le supremum qui nous intéresse.
• Notons f ce maximisant, on se convainc sans difficulté qu'il ne peut pas s'annuler, du moins dans

les situations pertinentes où $E(\mu,\nu)>0$. En effectuant ensuite un calcul variationnel autour de f, on obtient qu'il vérifie l'équation suivante pour tout $i\in E$,

$$\begin{aligned}\mu(i)f(i)\ln\left(\frac{f^2(i)}{\mu[f^2]}\right) &= E(\mu,\nu)\Big[f(i)[\nu(\{i,i+1\})(\ln(f^2(i))-\ln(f^2(i+1)))\\ &\quad +\nu(\{i-1,i\})(\ln(f^2(i))-\ln(f^2(i-1)))]\\ &\quad +\frac{\nu(\{i,i+1\})(f^2(i)-f^2(i+1))+\nu(\{i-1,i\})(f^2(i)-f^2(i-1))}{f(i)}\Big]\end{aligned}$$

(comme d'habitude, $\nu(\{-1,0\})=0=\nu(\{N,N+1\})$, les termes $f(-1)$ et $f(N+1)$ n'apparaissent donc jamais). Si μ ne s'annule pas, la forme de cette équation permet de lui appliquer les arguments de la fin de la section 3, tirant parti du fait qu'une fonction maximisante pour $E(\mu,\nu)$ ne peut prendre la même valeur sur trois points consécutifs, sauf à être constante (ce qui ne convient pas non plus). Remarquons aussi que contrairement aux sections 2 et 3, cette équation ne permet pas de calculer f récursivement à partir de la valeur de $f(0)$ et de $\mu[f^2]$, car le membre de droite n'est pas injectif en tant que fonction de $f(i+1)$ (pour $0\leq i<N$), seulement en tant que fonction de $f^2(i+1)$. Mais ceci était prévisible, puisque le signe des fonctions ne joue vraiment aucun rôle dans les quantités que nous considérons ici. Restent à traiter les cas où μ s'annule en certains points (intérieurs), que l'on ne peut plus effacer comme avant le lemme 2. Le plus simple est de contourner l'argument des trois points consécutifs de même valeur en adaptant la seconde preuve de la section précédente (en classant les fonctions selon le nombre de segments maximum inclus dans leur ensemble d'extrema locaux), ce qui est relativement immédiat.

• La dernière vérification, qui est aussi la plus importante, concerne la validité de la modification du lemme 3, c'est-à-dire, avec ses notations, a-t-on que tout $s\in]f(i_1),f(i_0)[$,

$$\mathcal{E}_\nu(f^2,\ln(f^2)) \;\geq\; \mathcal{E}_\nu((\widetilde{f}'_s)^2,\ln((\widetilde{f}'_s)^2))+\mathcal{E}_\nu((\widehat{f}'_s)^2,\ln((\widehat{f}'_s)^2)) \tag{9}$$

ceci pour toute fonction f de signe constant (situation à laquelle on se sera ramené). Cette question revient à se demander si pour tous $0\leq x\leq y\leq z$, on a

$$\varphi_{x,z}(y) \;\leq\; (z-x)(\ln(z)-\ln(x)) \tag{10}$$

où $\varphi_{x,z}$ est la fonction définie par

$$\forall\, y\in[x,z],\qquad \varphi_{x,z}(y) \;:=\; (y-x)(\ln(y)-\ln(x))+(z-y)(\ln(z)-\ln(y))$$

Or en dérivant deux fois cette fonction, il apparaît qu'elle est strictement convexe et (10) est alors une conséquence du fait que $\varphi_{x,z}(x)=\varphi_{x,z}(z)=(z-x)(\ln(z)-\ln(x))$. Il en découle aussi que l'on ne peut avoir égalité dans (9) que si pour toute arête $a\in A$, $\widetilde{f}'_s(a)\widehat{f}'_s(a)=0$.

Le reste des arguments de la section 3 est valable sans modification, puisqu'ils ne font intervenir que l'entropie. La proposition 11 s'ensuit.

Intéressons-nous maintenant à des inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées dans un cadre continu. Soit $H:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction convexe telle que $H(0)=0$ et $H'(0)=1$ (en fait outre ces deux égalités, nous n'utiliserons ici que la borne $x\leq H(x)$ valide pour tout $x\geq 0$). Nous voulons remplacer le terme d'énergie par la quantité homogène d'ordre 2 suivante :

$$\forall\, f\in\mathcal{C},\qquad \mathcal{E}_{H,\nu}(f) \;:=\; \int H\left(\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right)f^2\,d\nu$$

où l'on convient qu'en les points où f s'annule, l'intégrant vaut $(f')^2$. Les conditions mises sur H impliquent ainsi que

$$\forall\, f\in\mathcal{C},\qquad \mathcal{E}_{H,\nu}(f) \;\geq \nu[(f')^2] \tag{11}$$

Posons pour μ et ν, une probabilité et une mesure sur $\mathbb{R}$,

$$F(\mu,\nu) \quad := \quad \sup_{f\in\mathcal{C}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\mathcal{E}_{H,\nu}(f)} \qquad \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

Comme d'habitude, on cherche à démontrer l'égalité

$$F(\mu,\nu) \quad = \quad \sup_{f\in\mathcal{D}} \frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\mathcal{E}_{H,\nu}(f)} \tag{12}$$

Au vu de la seconde preuve de la section précédente, le seul point non immédiat concerne les cas qui se réduisaient à celui de la constante de Poincaré. Après s'être ramené à supposer que μ est à support dans $[-M,M]$ et que $\nu \geq \eta$, avec $M,\eta > 0$, il nous faut en effet voir que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite maximisante pour $F(\mu,\nu)$ telle que

$$\begin{aligned} \forall\, n\in\mathbb{N}, \qquad \mathcal{E}_{H,\nu}(f) \quad &= \quad 1 \\ \lim_{n\to\infty} |f_n(0)| \quad &= \quad +\infty \end{aligned}$$

alors $F(\mu,\nu) = A(\mu,\nu)/2$. Mais à nouveau une telle suite vérifiera $\nu[(f')^2] \leq 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et les f_n seront d'oscillations bornées, ce qui permet d'obtenir pour n grand l'équivalent

$$\mathrm{Ent}(f_n^2,\mu) \quad \sim \quad \frac{\mathrm{Var}(f_n,\mu)}{2}$$

Quitte à extraire une sous-suite (d'abord par relative compacité des f_n' dans $\mathbb{L}^2(\nu)$, puis en appliquant le théorème d'Ascoli), on peut supposer que les f_n convergent uniformément vers $f\in\mathcal{C}$, avec $\nu[(f')^2] \leq 1$, d'où

$$\begin{aligned} F(\mu,\nu) \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ent}(f_n^2,\mu) \\ &= \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(f_n,\mu)}{2} \\ &= \quad \frac{\mathrm{Var}(f,\mu)}{2} \\ &\leq \quad \frac{\mathrm{Var}(f,\mu)}{2\nu[(f')^2]} \\ &\leq \quad \frac{A(\mu,\nu)}{2} \end{aligned}$$

Cependant l'inégalité dans l'autre sens est toujours vraie. En effet, notons tout d'abord que l'on peut se contenter dans le supremum définissant $A(\mu,\nu)$ de ne considérer que des fonctions dont la dérivée faible est essentiellement bornée au sens de la mesure de Lebesgue sur $[-M,M]$. Ceci provient du fait qu'il suffit de prendre en compte les fonctions vérifiant $\nu[(f')^2] < +\infty$, ce qui permet d'approcher de manière traditionnelle de telles fonctions. Soit $f\in\mathcal{C}$ avec $f\geq 0$ et f' bornée. Considérons pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n := n+f$. La fonction f étant à oscillation finie, pour n grand on a $\mathrm{Ent}(f_n^2,\mu) \sim \mathrm{Var}(f_n,\mu)/2 = \mathrm{Var}(f,\mu)/2$. D'autre part par convergence dominée, on a, puisque $H'(0) = 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_{H,\nu}(f_n) \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} \int H\left(\frac{(f')^2}{(n+f)^2}\right)(n+f)^2\, d\nu \\ &= \quad \int (f')^2\, d\nu \end{aligned}$$

Il en découle que

$$\frac{\mathrm{Var}(f,\mu)}{2\nu[(f')^2]} \quad \leq \quad F(\mu,\nu)$$

puis l'inégalité voulue, en passant au supremum sur de telles fonctions f.
Des résultats similaires sont valables si l'on remplace $\mathcal{C}$ par $\mathcal{D}$. Il suffit donc de s'intéresser aux cas des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ maximisantes pour $F(\mu,\nu)$ vérifiant $\mathcal{E}_{H,\nu}(f_n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et telles que $\lim_{n\to\infty} f_n(0)$ existe dans $\mathbb{R}$. Mais dans cette situation, les arguments de la seconde preuve de la section 4 s'adaptent sans difficulté (on aura noté que pour toute fonction $f\in\mathcal{C}$ que l'on décompose en $\widetilde{f}+\widehat{f}$, avec $\widetilde{f},\widehat{f}\in\mathcal{C}$ et telles que p.p. $\widetilde{f}'\widehat{f}'=0$, on a trivialement $\mathcal{E}_{H,\nu}(f)=\mathcal{E}_{H,\nu}(\widetilde{f})+\mathcal{E}_{H,\nu}(\widehat{f})$).

Remarque 12 On peut se demander s'il existe un lien entre les inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées discrètes et les continues comme ci-dessus. Pour essayer de le faire apparaître, reprenons la procédure d'approximation utilisée dans la première preuve de la section 4. On considère donc une probabilité μ de la forme $\sum_{0\leq n\leq N}\mu(n)\delta_n$. La constante $F(\mu,\nu)$ peut alors se récrire

$$\sup_{f\in\mathcal{C}}\frac{\mathrm{Ent}(f^2,\mu)}{\mathcal{E}_J(f)} \tag{13}$$

avec pour tout $f\in\mathcal{C}$ dans le contexte discret,

$$\mathcal{E}_J(f) \;\; := \;\; \sum_{0\leq n<N} J_{n,n+1}(f(n),f(n+1))$$

et où les applications $(J_{n,n+1})_{0\leq n<N}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall\ 0\leq n<N,\ \forall\ x,y\in\mathbb{R},\qquad J_{n,n+1}(x,y) \;\; := \;\; \inf_{\substack{g\in\mathcal{C}([n,n+1]):\\ g(n)=x,\, g(n+1)=y}} \int_n^{n+1} H\left(\left(\frac{g'}{g}\right)^2\right) g^2\,\nu d\lambda$$

Evidemment, on ne change pas le supremum (13) si l'on s'y restreint à des fonctions monotones, puisque ce problème "discret" peut s'interpréter dans le contexte continu pour lequel on vient de vérifier cette propriété. Mais on pourrait certainement aussi le montrer directement, notons en particulier que pour tout $0\leq n<N$ et tous réels $x\leq y\leq z$, on a bien $J_{n,n+1}(x,z)\geq J_{n,n+1}(x,y)+J_{n,n+1}(y,z)$ (il suffit de couper toute fonction allant de x à z en la somme de sa restriction qui va de x à y puis y stationne et sa différence d'avec celle-ci).
Ceci nous amène à nous interroger sur la possibilité de récrire $\mathcal{E}_\nu$ sous la forme d'un $\mathcal{E}_J$, pour un choix approprié de la mesure ν continue (la discrète étant donnée) et de la fonction H.

$\square$

Nous cherchons ensuite à changer le terme d'entropie dans (1), ce qui conduit à des inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées en un autre sens (voir par exemple Chafaï [4]). Ceci nous fournira l'occasion de tester les limites des arguments de la section 3. Nous nous contenterons de traiter le cas discret avec l'énergie usuelle donnée par la forme quadratique $\mathcal{C}\ni f\mapsto\nu[(f')^2]$, bien que l'on imagine que des considérations similaires aux précédentes permettraient d'étendre ce qui suit à la situation continue ou aux énergies modifiées comme ci-dessus. Soit $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction convexe, de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$. L'entropie modifiée correspondante est la fonctionnelle qui à toute application $f\in\mathcal{C}$, $f\geq 0$, associe la quantité (positive par l'inégalité de Jensen)

$$\mathrm{E}_\varphi[f] \;\; = \;\; \mu[\varphi(f)]-\varphi(\mu[f])$$

Malheureusement l'expression $\mathrm{E}_\varphi(f^2)$ n'est plus homogène d'ordre 2 en f (sauf à être proportionnelle à l'entropie usuelle en f^2). Pour arranger ce défaut, nous aurons besoin de deux hypothèses supplémentaires. Posons ψ l'application définie par

$$\forall\ x>0,\qquad \psi(x) \;\; := \;\; x\varphi'(x)-\varphi(x)$$

On dit que ψ est asymptotiquement concave s'il existe $R>0$ tel que la fonction ψ est en-dessous de ses tangentes s'appuyant en des points plus grands que R :

$$\forall\ y\geq R,\ \forall\ x>0,\qquad \psi(x) \;\; \leq \;\; \psi(y)+\psi'(y)(y-x)$$

Ceci implique notamment que ψ est concave sur $[R, +\infty[$ (ce qui n'est pas suffisant, mais il suffit de vérifier en plus que $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) - x\psi'(x) = +\infty$). On supposera premièrement que ψ est asymptotiquement concave. La seconde hypothèse consiste en l'existence d'une constante $\eta > 0$ telle que pour tout $0 < x < \eta$, on ait $\varphi''(x) + x\varphi'''(x) \geqslant 0$ (si φ est $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}_+$, il suffit pour cela que $\varphi''(0) > 0$, plus généralement, si l'on ne veut même pas supposer φ de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut voir qu'il suffirait de supposer l'application $x \mapsto x\varphi''(x)$ croissante sur un intervalle $]0, \eta[$). Un exemple de fonction φ satisfaisant ces conditions est $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x\ln(\ln(e + x))$.
Remarquons que

$$\forall\ x > 0, \qquad \psi'(x) \;=\; x\varphi''(x) \;\geq\; 0$$

et que cette quantité décroît pour $x \geq R$, elle admet donc une limite $L \geq 0$ en $+\infty$. Ainsi pour x grand, $\varphi''(x) \leq (1+L)/x$, ce qui montre qu'à un facteur près, $\varphi(x)$ est dominé par $x\ln(x)$. L'entropie usuelle est en quelque sorte un majorant des entropies modifiées que nous allons considérer ici.

Pour μ une probabilité sur $E = \{0, ..., N\}$ et ν une mesure sur l'ensemble A des arêtes correspondant, on s'intéresse à la quantité

$$G(\mu, \nu) \;\coloneqq\; \sup_{f\in\mathcal{C}} \frac{\mathrm{E}_\varphi(f^2)}{\nu[(f')^2]}$$

et notre objectif récurrent est de vérifier que

$$G(\mu, \nu) \;=\; \sup_{f\in\mathcal{D}} \frac{\mathrm{E}_\varphi(f^2)}{\nu[(f')^2]} \tag{14}$$

La principale contrariété provient de la non homogénéité de E_φ, qui a priori nous interdit de ne considérer que des suites maximisantes pour $G(\mu, \nu)$ à énergie majorée et minorée par une constante strictement positive. Pour y remédier, remarquons qu'il n'y a ici aucune obstruction à supposer μ et ν strictement positives sur E. Cette propriété nous assure de l'existence d'une constante $b_1 > 0$ telle que

$$\forall\ g \in \mathcal{C}, \qquad \nu[(g')^2] = 1 \;\;\Rightarrow\;\; \mu[g^2] \geq b_1$$

Fixons une fonction g vérifiant $\nu[(g')^2] = 1$ et considérons la fonction

$$F \;:\; \mathbb{R}_+^* \ni t \;\;\mapsto\;\; \mathrm{E}_\varphi[tg^2]/t \tag{15}$$

On calcule que sa dérivée est donnée par

$$\forall\ t > 0, \qquad F'(t) \;=\; t^{-2}(\mu[\psi(tg^2)] - \psi(t\mu[g^2]))$$

Ainsi par notre hypothèse d'asymptotique concavité sur ψ, F est décroissant sur $[R/b_1, +\infty[$. Ceci montre que

$$G(\mu, \nu) \;=\; \sup_{f\in\mathcal{C}\,:\,\nu[(f')^2]\leq R/b_1} \frac{\mathrm{E}_\varphi(f^2)}{\nu[(f')^2]}$$

ce qui nous permet de ne considérer que des suites maximisantes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\nu[(f_n')^2] \leq R/b_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut également supposer que ces fonctions f_n, pour $n \in \mathbb{N}$, sont positives. Ecrivons $f_n = \sqrt{t_n} g_n$, avec $t_n > 0$ (on écarte les cas triviaux où $t_n = 0$) et $g_n \in \mathcal{C}$ vérifiant $\nu[(g_n')^2] = 1$. A une extraction de sous-suite près, on se ramène à la situation où les suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement dans $[0, R/b_1]$ et $\bar{\mathbb{R}}_+$. Distinguons plusieurs cas :
• si $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, vérifions qu'alors on peut se ramener à supposer $\lim_{n\to\infty} f_n(0) > 0$. En effet, notre seconde hypothèse sur ψ assure que si $g \in \mathcal{C}$, $g \geqslant 0$, la fonction F définie en (15) est croissante

sur $]0,\eta/\max g^2]$. Ceci s'obtient en effectuant un développement du second ordre avec reste : pour $t>0$ fixé, il existe une fonction $\theta_t\ :\ E\to]0,t\max g^2[$ telle que

$$\psi(tg^2) \;=\; \psi(t\mu[g^2])+\psi'(t\mu[g^2])t(g^2-\mu[g^2])+\frac{\psi''(\theta_t)}{2}t^2(g^2-\mu[g^2])^2$$

En intégrant cette égalité par rapport à μ, il apparaît que $F'(t)$ est positif dès que $t\max g^2\leqslant\eta$. Par ailleurs, il existe une constante $b_2>0$ telle que si g vérifie $\nu[(g')^2]=1$, alors $\mathrm{osc}(g)\leqslant b_2$ et donc si g est de plus positive, $\max g^2\leqslant(g(0)+b_2)^2$. En conséquence, si on construit une nouvelle suite $(\widetilde{t}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\qquad \widetilde{t}_n \;:=\; \begin{cases} t_n & \text{, si } t_n(g_n(0)+b_2)^2>\eta\\ \eta/(g_n(0)+b_2)^2 & \text{, sinon}\end{cases}$$

la suite $(\widetilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\widetilde{f}_n:=\widetilde{t}_n g_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, reste maximisante pour $G(\mu,\nu)$. On considère désormais cette suite que l'on renomme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\qquad t_n(g_n(0)+b_2)^2 \;\geqslant\; \eta$$

c'est-à-dire $f_n^2(0)+2b_2\sqrt{t_n}f_n(0)+b_2^2t_n\geqslant\eta$, ce qui interdit la convergence $\lim_{n\to\infty}f_n(0)=0$.
On peut maintenant effectuer un développement du second ordre avec reste pour $\mathrm{E}_\varphi(f_n^2)$: il existe une nouvelle fonction θ_n à valeurs dans $[f_n(0)-\sqrt{t_n}b_2,f_n(0)+\sqrt{t_n}b_2]$ telle que

$$\mathrm{E}_\varphi(f_n^2) \;=\; \mu\left[\varphi''(\theta_n)(f_n^2-\mu[f_n^2])^2\right]/2$$

Envisageons d'abord le cas où $l:=\lim_{n\to\infty}f_n(0)$ est fini. Puisque $l>0$, on a uniformément sur E,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi''(\theta_n)(f_n+\sqrt{\mu[f_n^2]})^2/2 \;=\; 2l^2\varphi''(l^2)$$

Si $l^2\varphi''(l^2)>0$, on en déduit pour n grand l'équivalent

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_\varphi(f_n^2) &\sim 2l^2\varphi''(l^2)\mu[(f_n-\sqrt{\mu[f_n^2]})^2]\\ &\leqslant 2l^2\varphi''(l^2)\mathrm{Var}(f_n,\mu)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{E}_\varphi(f_n^2)}{\nu[(f_n')^2]} &\leqslant 2l^2\varphi''(l^2)\limsup_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(f_n,\mu)}{\nu[(f_n')^2]}\\ &\leqslant 2l^2\varphi''(l^2)A(\mu,\nu)\end{aligned}$$

De même on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{E}_\varphi(f_n^2)}{\nu[(f_n')^2]} \;=\; 0$$

si $l^2\varphi''(l^2)=0$. Il apparaît ainsi que l'on a toujours

$$\begin{aligned}G(\mu,\nu) &\leqslant \sup_{l>0}2l^2\varphi''(l^2)A(\mu,\nu)\\ &= \sup_{l>\eta}2l^2\varphi''(l^2)A(\mu,\nu)\end{aligned}$$

cette dernière égalité provenant de la croissance de l'application $x\mapsto x\varphi''(x)$ sur $]0,\eta]$. Réciproquement, l'inégalité $G(\mu,\nu)\geqslant\sup_{l>\eta}2l^2\varphi''(l^2)A(\mu,\nu)$ est satisfaite en toutes circonstances : il suffit de considérer dans le supremum définissant $G(\mu,\nu)$, pour tout $l\geqslant\eta$ donné, des fonctions de la forme $l+\epsilon f$, avec $f\in\mathcal{C}$ et $\epsilon>0$ que l'on fait tendre vers 0. Ce qui précède vaut aussi si

$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = +\infty$, en utilisant l'existence et la finitude de $L = \lim_{x\to+\infty} x\varphi''(x)$. Dans tous les cas, la convergence $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ entraîne donc l'égalité $G(\mu,\nu) = \sup_{l>\eta^2} 2l\varphi''(l)A(\mu,\nu)$. On a alors aussi

$$\begin{aligned}
\sup_{f\in\mathcal{D}} \frac{\mathrm{E}_\varphi(f^2)}{\nu[(f')^2]} &= \left(\sup_{l>\eta^2} 2l\varphi''(l)\right) \sup_{f\in\mathcal{D}} \frac{\mathrm{Var}(f,\mu)}{\nu[(f')^2]} \\
&= \left(\sup_{l>\eta^2} 2l\varphi''(l)\right) A(\mu,\nu)
\end{aligned}$$

d'où l'identité voulue (14).
• Si $\lim_{n\to\infty} t_n \in]0, R/b_1]$, on retrouve un cadre plus classique, et comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, on distingue deux sous-cas.
- si $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = +\infty$, la bornitude des oscillations des f_n en $n \in \mathbb{N}$ et la convergence $\lim_{t\to+\infty} x\varphi''(x) = L$ permet à nouveau d'effectuer un développement du second ordre avec reste, pour obtenir en n grand l'équivalent

$$\mathrm{E}_\varphi(f_n^2) \sim \frac{L}{2}\mathrm{Var}(f_n,\mu)$$

si $L > 0$. Par contre si $L = 0$, il ressort plutôt que

$$\mathrm{E}_\varphi(f_n^2) \ll \mathrm{Var}(f_n,\mu)$$

Puisque $A(\mu,\nu) < +\infty$, cette dernière possibilité implique que l'on est dans une situation triviale où $G(\mu,\nu) = 0$. Si $L > 0$, on obtient aussi $G(\mu,\nu) = LA(\mu,\nu)/2$. Ce qui nous ramène au cas de l'inégalité de Poincaré.
- si $\lim_{n\to\infty} f_n(0)$ existe dans $\mathbb{R}$, on montre facilement l'existence d'une fonction minimisante. Mais la démonstration du lemme 5 s'adapte immédiatement à cette situation, vu la forme de l'entropie modifiée E_φ. Le plus rapide pour conclure ensuite à la validité de (14) est d'adapter la seconde preuve de la section 4.

Remarque 13 Il serait très intéressant de savoir si les considérations présentées ici peuvent s'étendre à la situation des arbres (nous pensons que cela permettrait de mieux comprendre les bornes de type Hardy correspondantes pour la constante de Poincaré ou de Sobolev logarithmique, voir Evans, Harris et Pick [8] et [11]). Considérons par exemple le cas discret. Fixons une feuille o de l'arbre, ce qui permet de le munir d'un ordre partiel, en donnant à o le statut de racine (on convient que $y \geq x$ si x se trouve sur l'unique chemin ne se recoupant pas allant de o à y). On définit ensuite $\mathcal{D}(o)$ comme l'ensemble des fonctions monotones pour cet ordre partiel.
Nous nous demandons si comme précédemment, il suffit de considérer de telles fonctions dans les inégalités de Poincaré ou de Sobolev logarithmiques (modifiées). Il s'agira d'être prudent, car même dans le cas de l'inégalité de Poincaré, une fonction maximisante ne sera pas nécessairement un élément de $\mathcal{D}(o)$, ni même n'appartiendra à l'un de ces ensembles quand o parcourt toutes les feuilles. Considérons ainsi l'arbre formé d'un point central (de masse $1/4$ pour μ) relié à quatre feuilles (toutes de masse $1/8$ pour μ). Prenons pour ν la mesure donnant un poids 1 à chacune des quatre arêtes. On vérifie qu'à une constante additive près, les fonctions maximisantes sont celles qui s'annulent sur le point central et dont la somme des valeurs sur les feuilles vaut aussi 0 (ces dernières correspondent à l'espace propre associé au trou spectral sous-jacent). Elles n'appartiennent donc pas toutes à $\cup_{o\in O}\mathcal{D}(o)$ (contrairement au cas de l'arbre à trois branches), où O est l'ensemble des quatre feuilles. Par contre pour tout $o \in O$ fixé, on peut trouver une fonction maximisante dans $\mathcal{D}(o)$.

□

Références

[1] Cécile Ané, Sébastien Blachère, Djalil Chafaï, Pierre Fougères, Ivan Gentil, Florent Malrieu, Cyril Roberto et Grégory Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 de *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2000. Avec une préface de Dominique Bakry et Michel Ledoux.

[2] F. Barthe et C. Roberto. Sobolev inequalities for probability measures on the real line. *Studia Math.*, 159(3) :481–497, 2003. Dédicacé au Professeur Aleksander Pełczyński à l'occasion de son 70ième anniversaire (Polonais).

[3] S. G. Bobkov et F. Götze. Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.*, 163(1) :1–28, 1999.

[4] Djalil Chafaï. Entropies, convexity, and functional inequalities. *J. Math. Kyoto Univ.*, 44(2) :325–363, 2004.

[5] Mu-Fa Chen et Feng-Yu Wang. Estimation of spectral gap for elliptic operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(3) :1239–1267, 1997.

[6] Mufa Chen. Analytic proof of dual variational formula for the first eigenvalue in dimension one. *Sci. China Ser. A*, 42(8) :805–815, 1999.

[7] Mufa Chen. Variational formulas and approximation theorems for the first eigenvalue in dimension one. *Sci. China Ser. A*, 44(4) :409–418, 2001.

[8] W. D. Evans, D. J. Harris, and L. Pick. Weighted Hardy and Poincaré inequalities on trees. *J. London Math. Soc. (2)*, 52(1) :121–136, 1995.

[9] Ivan Gentil, Arnaud Guillin et Laurent Miclo. Modified logarithmic Sobolev inequalities and transportation inequalities. Préprint à paraître dans *Probab. Theory Related Fields*, 133(3) :409–436, 2005.

[10] L. Miclo. Quand est-ce que des bornes de Hardy permettent de calculer une constante de Poincaré exacte sur la droite ? Préprint à paraître dans le *Séminaire de Probabilités, XXXIX*, volume 1874 de *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 2006.

[11] Laurent Miclo. Relations entre isopérimétrie et trou spectral pour les chaînes de Markov finies. *Probab. Theory Related Fields*, 114(4) :431–485, 1999.

[12] O. S. Rothaus. Logarithmic Sobolev inequalities and the spectrum of Sturm-Liouville operators. *J. Funct. Anal.*, 39(1) :42–56, 1980.

[13] O. S. Rothaus. Diffusion on compact Riemannian manifolds and logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.*, 42(1) :102–109, 1981.

[14] O. S. Rothaus. Logarithmic Sobolev inequalities and the spectrum of Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 42(1) :110–120, 1981.

[15] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, troisième édition, 1987.

[16] Laurent Saloff-Coste. Lectures on finite Markov chains. Dans *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1996)*, volume 1665 de *Lecture Notes in Math.*, pages 301–413. Springer, Berlin, 1997.

[17] Liming Wu. A new modified logarithmic Sobolev inequality for Poisson point processes and several applications. *Probab. Theory Related Fields*, 118(3) :427–438, 2000.

miclo@latp.univ-mrs.fr

Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités, UMR 6632
Centre de Mathématiques et Informatique
Université de Provence et Centre National de la Recherche Scientifique
39, rue F. Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13, France